

Geometria. a.a. 2022–23

Prova scritta del 8 Febbraio 2023

Esercizio 1. Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

calcolare:

- (1) il rango di A ,
- (2) la matrice $I - A^2$,
- (3) la matrice $(I + A)^{-1}$.

Soluzione. Tramite riduzione a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1, R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ricava che il rango è 1. Si verifica poi che $A^2 = 0$ e quindi $I - A^2 = (I + A)(I - A) = I$ da cui segue anche che $(I + A)^{-1} = I - A$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di 4 equazioni nelle incognite x_1, \dots, x_4 , dipendente dal parametro $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = t \\ x_1 - tx_2 + tx_4 = t \end{cases}$$

Determinare per quali valori di t il sistema è incompatibile e per quali valori di t esiste una soluzione con $x_1 = 0$.

Soluzione Applichiamo eliminazione di Gauss e Rouché–Capelli:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & t \\ 1 & -t & 0 & t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operazioni sulle righe}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & t \\ 0 & 0 & 0 & t-3 & \frac{t^2-3t}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque per $t \neq 3$ il sistema è compatibile e ha un'unica soluzione, mentre per $t = 3$ il sistema è compatibile e ha infinite soluzioni.

Esercizio 3. Calcolare rango e segnatura della forma bilineare $b: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 + 78(x_1y_4 + x_4y_1) - 36(x_2y_3 + x_3y_2).$$

Soluzione La forma è definita positiva sul sottospazio generato dai primi due vettori della base canonica, quindi l'indice di positività è ≥ 2 . Similmente forma è definita negativa sul sottospazio generato dagli ultimi due vettori della base canonica, quindi l'indice di negatività è ≥ 2 . Dunque la forma bilineare è coatta ad avere rango 4 e segnatura $(2, 2)$.

Esercizio 4. Sul campo reale, determinare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 - \lambda & 4 \\ 4 & 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -t^3 + 36t = -t(t^2 - 36) = -t(t - 6)(t + 6)$$

e quindi gli autovalori sono $0, 6, -6$. Risolvendo i corrispondenti sistemi lineari $Ax = 0$, $Ax = 6x$ e $Ax = -6x$ troviamo i tre autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Siccome la matrice è simmetrica sappiamo dalla teoria che v_1, v_2, v_3 è una base ortogonale. Per ottenere una base ortonormale basta dividere ciascun vettore per la sua norma.

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Consideriamo, al variare di $k \in \mathbb{R}$ le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 1 \\ -2 & k & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) Dimostrare che esiste *al più* un unico $k \in \mathbb{R}$ per cui A e A' sono simili.
- (2) Determinare, spiegando il ragionamento, *se* esiste un $k \in \mathbb{R}$ per cui A e A' siano simili.

Soluzione

- (1) Dato che matrici simili hanno lo stesso determinante e la stessa traccia, per $k \neq 3$ le due matrici non sono simili.
- (2) Per $k = 3$ le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico

$$p_{A_3}(t) = p_B(t) = -t^3 + 5t^2 - 7t + 3 = (1 - t)^2(3 - t).$$

Guardiamo adesso alle molteplicità geometriche dell'autovalore 1.

$$rg(A_3 - I) = 1, \quad rg(B - I) = 2.$$

Dunque A_3 è diagonalizzabile, mentre B non è diagonalizzabile. In conclusione A_k non è mai simile a B .